پاسخنامه تشریحی فصل یازدهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینه‌ی «۲»

دنباله‌ی S_n مجموع n جمله از یک دنباله‌ی هندسی است که جمله‌ی اول آن برابر $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت آن هم برابر $\frac{1}{2}$ است، پس طبق فرمول مجموع جملات داریم:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_n=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\cancel{(1-\frac{1}{2})}}=1-(\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow S_{n-1}=1-(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\Rightarrow S_{n-1}<0/99S_n\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^{n-1}<0/99(1-(\frac{1}{2})^n)$$

$$\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^{n-1}<0/99-0/99\times(\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n\times(\frac{1}{2})^{-1}<0/99-0/99(\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow 1-0/99<(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^{-1}-0/99(\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow 0/01<(\frac{1}{2})^n((\frac{1}{2})^{-1}-0/99)$$

$$\Rightarrow 0/01<(\frac{1}{2})^n(2-0/99)$$

$$\Rightarrow 0/01<(\frac{1}{2})^n(1/01)\Rightarrow\frac{0/01}{1/01}<(\frac{1}{2})^n$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{1/01}{0/01}>2^n\Rightarrow 2^n<101\Rightarrow n\le 6$$

دقت کنید که به ازای $n=7$، 2^n برابر ۱۲۸ شده که در نامعادله صدق نمی‌کند.

۲. گزینه‌ی «۳»

در دنباله‌ی حسابی $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$ و در دنباله‌ی هندسی $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ هستند، پس:

$$\begin{cases}a_1=1\\d=1\\n=20\end{cases}\Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}(2\times1+19\times1)=210$$

$$\begin{cases}a_1=1\\q=3\\n=n\end{cases}\Rightarrow S_n=\frac{1(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$$

با توجه به فرضیات سؤال داریم:

$$S_{20}=S_n-154\Rightarrow 210=S_n-154\Rightarrow S_n=364\Rightarrow\frac{3^n-1}{2}=364$$

$$\Rightarrow 3^n-1=364\times2\Rightarrow 3^n=728+1$$

$$\Rightarrow 3^n=729\Rightarrow 3^n=3^6\Rightarrow n=6$$

۳. گزینه‌ی «۲»

در سؤال گفته شده که جملات چهارم و هفتم دنباله‌ی هندسی ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-3x+m-1=0$ است، یعنی: $x_1=a_4$، $x_2=a_7$. در دنباله‌ی هندسی جمله‌ی n اُم از رابطه‌ی aq^{n-1} به‌دست می‌آید، پس:

$$\begin{cases}x_1=a_4=aq^3\\x_2=a_7=aq^6\end{cases}$$

از طرفی در معادله‌ی درجه‌ی دو می‌دانیم که $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$ پس:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=3\Rightarrow aq^3+aq^6=3\\\Rightarrow aq^3(1+q^3)=3\qquad(1)\\x_1x_2=\frac{m-1}{1}=m-1\Rightarrow(aq^3)(aq^6)=m-1\\\Rightarrow a^2q^9=m-1\quad(2)\end{cases}$$

در صورت سؤال هم‌چنین گفته شده است $\frac{S_6}{S_3}=\sqrt{2}$ و می‌دانیم که در دنباله‌ی هندسی S_n از رابطه‌ی $\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ به‌دست می‌آید. لذا:

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{a(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}}$$

$$=1+q^3\Rightarrow 1+q^3=\sqrt{2}\qquad(3)$$

$$\xrightarrow{(1)}aq^3(\sqrt{2})=3\Rightarrow aq^3=\frac{3}{\sqrt{2}}\qquad(4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴) داریم:

$$a_2a_6=(aq)(aq^5)=a^2q^6=(aq^3)^2=(\frac{3}{\sqrt{2}})^2=\frac{9}{2}$$

۴. گزینه‌ی «۴»

طبق هم‌ارزی $f^g\sim e^{(f-1)g}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n})^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}e^{(1+\frac{a}{n}-1)(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{a(n+1)}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{an}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^a=\sqrt{e}\Rightarrow e^a=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

حال برای همگرایی دنباله‌ی $(\frac{2an+1}{n+2})$ با توجه به $a=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times\frac{1}{2}n+1}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=1$$

۵. گزینه‌ی «۴»

در دنباله‌ی حسابی جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ به‌دست می‌آید، لذا داریم:

$$a_6 + a_{20} = 30 \Rightarrow (a_1 + 5d) + (a_1 + 19d) = 30$$
$$\Rightarrow 2a_1 + 24d = 30 \Rightarrow a_1 + 12d = 15 (*)$$

حال مجموع خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$S = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \Rightarrow S = S_{16} - S_9$$

در دنباله‌ی حسابی S_n از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ به‌دست می‌آید، پس:

$$S = \frac{16}{2}[2a_1 + (16-1)d] - \frac{9}{2}[2a_1 + (9-1)d]$$
$$= 8(2a_1 + 15d) - \frac{9}{2}(2a_1 + 8d)$$
$$\Rightarrow S = (16a_1 + 120d) - (9a_1 + 36d)$$
$$\Rightarrow S = 7a_1 + 84d = 7(a_1 + 12d)$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} S = 7(15) = 105$$

۶. گزینه‌ی «۳»

عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$S = (\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + ...) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{243} + ...) - (\frac{1}{27} + \frac{1}{729} + ...)$$

هر پرانتز یک دنباله‌ی هندسی نزولی نامحدود با قدرنسبت $\frac{1}{27}$ است.

حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نزولی از رابطه‌ی $\frac{a_1}{1-q}$ به‌دست می‌آید، لذا داریم:

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{27}} + \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{27}} - \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{27}}$$
$$\Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{26}{27}} + \frac{\frac{1}{9}}{\frac{26}{27}} - \frac{\frac{1}{27}}{\frac{26}{27}} = \frac{1}{\frac{26}{27}}(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}) = \frac{\cancel{27}}{26}(\frac{9+3-1}{\cancel{27}}) = \frac{11}{26}$$

۷. گزینه‌ی «۴»

کافی است جملات دنباله‌ها را بنویسیم:

$$1)\ \frac{1}{\cos n\pi} \to -1, 1, -1, ... \to \text{غیر ثابت}$$
$$2)\ \cos n\pi \to -1, 1, -1, ... \to \text{غیر ثابت}$$
$$3)\ \frac{\cos^2 n\pi}{(-1)^n} \to \frac{(-1)^2}{(-1)^1}, \frac{(+1)^2}{(-1)^2}, \frac{(-1)^2}{(-1)^3}, ...$$
$$\to -1, 1, -1, 1, ... \to \text{غیر ثابت}$$
$$4)\ \sin((-1)^n \pi) \to 0, 0, 0, 0, ... \to \text{ثابت}$$

۸. گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} a_{15} = 34 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_{15} = a_1 + 14d = 34 \\ S_8 = 20 \xrightarrow{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]} S_8 = \frac{\cancel{8}}{\cancel{2}}(2a_1 + 7d) = \overset{5}{\cancel{20}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ 2a_1 + 7d = 5 \ (*) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ -4a_1 - 14d = -10 \end{cases} \Rightarrow -3a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = -8 \xrightarrow{(*)}$$
$$2(-8) + 7d = 5 \Rightarrow 7d = 5 + 16 = 21 \Rightarrow d = 3$$
$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \Rightarrow S_{20} = 10(2(-8) + 19 \times 3)$$
$$= 10(-16 + 57) = 10 \times 41 = 410$$

۹. گزینه‌ی «۳»

با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_7 + a_8 + a_9 = 192 \end{cases}$$

می‌دانیم که جمله‌ی عمومی در دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی $a_n = aq^{n-1}$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 3 \ (*) \\ a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8 = 192 \Rightarrow q^6(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 192 \end{cases}$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} q^6(3) = 192 \Rightarrow q^6 = \frac{192}{3} = 64 = 2^6 \Rightarrow q = \pm 2$$

۱۰. گزینه‌ی «۱»

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله، با توجه به گزینه‌ها فقط کافی است دو جمله‌ی نخست دنباله را بنویسیم:

$$a_n = n^2 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_1 = 2 \ , \ a_2 = 4 + \frac{1}{2} = 4/5 \Rightarrow a_2 > a_1 \Rightarrow \text{صعودی}$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = (\infty)^2 + \frac{1}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

پس این دنباله فقط از پایین کراندار است، زیرا با افزایش جملات آن صعود کرده و نامتناهی می‌شود یعنی بی‌کران می‌شود.

آزمون جامع ۲

۱. گزینه‌ی «۲»

مشاهده می‌کنیم که جمله‌ی اول هر دسته از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

(شماره‌ی دسته‌ی قبلی) − ^{2}(شماره‌ی دسته) = جمله‌ی اول دسته‌ی nاُم

$$= n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$$

و هم‌چنین جمله‌ی آخر هر دسته هم از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

(شماره‌ی دسته‌ی قبلی) + ^{n}(شماره‌ی دسته) = جمله‌ی آخر دسته‌ی nاُم

$$= n^2 + (n-1) = n^2 + n - 1$$

پس برای دسته‌ی پانزدهم داریم:

جمله‌ی اول دسته‌ی پانزدهم $= 15^2 - 15 + 1 = 225 - 15 + 1 = 211$

جمله‌ی آخر دسته‌ی پانزدهم $= 15^2 + 15 - 1 = 239$

۲. گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_3 = 9 \Rightarrow a_1 + 2d = 9 \Rightarrow 5 + 2d = 9 \Rightarrow d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = a_7 + a_8 + a_9 = (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d)$$
$$= 3a_1 + 21d$$
$$) + 21(2) = 15 + 42 = 57$$

۳. گزینه‌ی «۴» در دنباله‌ی هندسی، $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{a(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3}=1+q^3$$

$$\xrightarrow{q=2}\frac{S_6}{S_3}=1+8=9$$

۴. گزینه‌ی «۳» برای تشخیص صعودی و نزولی بودن دنباله کافی است دو جمله‌ی اولیه‌ی دنباله را بنویسیم:

$a_n=(1-\frac{1}{n})^n\to a_1=0\ ,\ a_2=\frac{1}{4}\Rightarrow a_2>a_1\Rightarrow$ دنباله‌ی صعودی

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$$

۵. گزینه‌ی «۲» در دنباله‌ی حسابی، $a_n=a_1+(n-1)d$ است، پس:

$$a_3=7\Rightarrow a_1+2d=7(*)$$

$$S=a_1+a_2+a_6=a_1+(a_1+d)+(a_1+5d)$$

$$\Rightarrow S=3a_1+6d=3(a_1+2d)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}S=3(7)=21$$

۶. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1-(\frac{3}{4})^{+\infty}=1-0=1\to \text{همگرا}$$

$$a_n=1-(\frac{3}{4})^n\Rightarrow a_{n+1}=1-(\frac{3}{4})^{n+1}(*)$$

می‌دانیم که اعداد کوچک‌تر از واحد هر چه به توان برسند، کوچک‌تر می‌شوند، یعنی: $(\frac{3}{4})^{n+1}<(\frac{3}{4})^n\xrightarrow{\times(-1)}-(\frac{3}{4})^{n+1}>-(\frac{3}{4})^n$

$$\xrightarrow{+1}1-(\frac{3}{4})^{n+1}>1-(\frac{3}{4})^n$$

$\xrightarrow{(*)}a_{n+1}>a_n\Rightarrow$ دنباله‌ی a_n اکیداً صعودی است.

پس دنباله‌ی داده‌شده یکنوا و همگرا است.

۷. گزینه‌ی «۳»

از آن‌جایی‌که دنباله‌ی a_n همگرا است، داریم: $\lim_{x\to+\infty}a_n=L$ درصورتی که $\lim_{n\to+\infty}b_n=\pm\infty$ باشد، داریم: $\lim_{n\to+\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{L}{\pm\infty}=0$

البته می‌دانیم که اگر a_n دنباله‌ای همگرا و b_n دنباله‌ای واگرا باشد، دنباله‌های $\{a_n\pm b_n\}$ و $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ همواره واگرایند، گزینه‌ی «۴» هم همواره واگرا است، زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+1)b_n=\underbrace{(L^2+1)}_{\text{مخالف صفر}}\times\lim_{n\to\infty}b_n=\text{واگرا}$$

۸. گزینه‌ی «۱» ابتدا چند جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ها را می‌نویسیم:

$1)\ a_n=\frac{n^2+3}{n^2+2}:\frac{4}{3},\frac{7}{6},...\to\frac{7}{6}<\frac{4}{3}\to$ نزولی

$2)\ a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}:0,\frac{3}{5},...\to$ نزولی نیست

$3)\ a_n=\frac{n}{n+1}:\frac{1}{2},\frac{2}{3},...\to\frac{2}{3}>\frac{1}{2}\to$ نزولی نیست

$4)\ a_n=\sqrt{n}:1,\sqrt{2},...\to\sqrt{2}>1\to$ نزولی نیست

دقت کنید که در این سؤال گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نزولی نبودند و شاید هم از جمله‌ای به بعد نزولی کنند که در این صورت این دنباله‌ها غیریکنوا می‌شوند.

هم‌چنین در گزینه‌ی (۱) داریم: $a_n=\frac{(n^2+2)+1}{n^2+2}=1+\frac{1}{n^2+1}$

مشاهده می‌کنیم که با افزایش n، مخرج کسر بزرگ و در نتیجه کل کسر کوچک می‌شود، یعنی جملات دنباله دائم در حال کوچک شدن هستند.

۹. گزینه‌ی «۱» می‌دانیم که $\cos n\pi=(-1)^n$ است، پس:

$$a_n=\frac{(-1)^n(-1)^n}{2n+1}=\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ دنباله همگرا به صفر است.

هم‌چنین با افزایش n، مخرج کسر بزرگ‌تر شده و در نتیجه کل کسر کوچک می‌شود، یعنی دنباله‌ی $\frac{1}{2n+1}$ اکیداً نزولی است، پس دنباله‌ی داده‌شده همگرا و یکنواست.

۱۰. گزینه‌ی «۱» با توجه به هم‌ارزی $\sqrt{an^2+bn+c}\sim\sqrt{a}(n+\frac{b}{2a})$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\sim\lim_{n\to+\infty}\left\{\sqrt{1}(\cancel{n}+\frac{4}{2\times1})-\cancel{n}\right\}=2\Rightarrow 2\ \text{همگرا به}$$

با توجه به گزینه‌ها، برای تشخیص صعودی و نزولی بودن دنباله دو جمله‌ی نخست دنباله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}a_1=\sqrt{1+4}-1=\sqrt{5}-1\\ a_2=\sqrt{4+8}-2=\sqrt{12}-2\end{cases}$$

حال فرض می‌کنیم $a_2>a_1$ است و سپس صحت آن را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{12}-2>\sqrt{5}-1\Rightarrow\sqrt{12}>\sqrt{5}+1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}12>(5+1+2\sqrt{5})\Rightarrow 6>2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow 3>\sqrt{5}\to$ درست

پس دنباله‌ی داده‌شده صعودی است.

آزمون جامع ۳

۱. گزینه‌ی «۳»

در دنباله‌ی هندسی داده‌شده داریم:

$$\begin{cases}a_1=2\\ a_3=\frac{8}{9}\to a_1q^2=\frac{8}{9}\Rightarrow 2q^2=\frac{8}{9}\Rightarrow q^2=\frac{4}{9}\Rightarrow q=\pm\frac{2}{3}\end{cases}$$

چون در مسأله گفته شده است که دنباله غیریکنواست، $q=-\frac{2}{3}$ قابل قبول است. حد مجموع جملات از رابطه‌ی $\frac{a_1}{1-q}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{cases}a_1=2\\ q=-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow S_{\text{حد}}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{2}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{2}{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}$$

۲. گزینه‌ی «۳»

در دنباله‌ی داده‌شده به‌خاطر وجود $(-1)^n$، دنباله غیریکنواست، زیرا:

$$a_n=\frac{(n+1)-1+(-1)^n}{n+1}=1+\frac{(-1)+(-1)^n}{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}1 & ,\text{زوج } n\\ 1-\frac{2}{n+1} & ,\text{فرد } n\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\begin{cases}1 & \text{زوج } n\\ 1-\frac{2}{\infty}=1 & \text{فرد } n\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=1\Rightarrow \text{همگرا}\Rightarrow \text{کراندار}$$

۳. گزینه‌ی «۳»

روش اول: دنباله‌ی داده‌شده یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت ۲ است، پس:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]\Rightarrow 64=\frac{n}{2}(2\times1+(n-1)\times2]$$

$$\Rightarrow 128=n(\cancel{2}+2n-\cancel{2})\Rightarrow 128=2n^2\Rightarrow n^2=64\Rightarrow n=8$$

روش دوم: اعداد داده‌شده اعداد فرد طبیعی هستند و می‌دانیم که مجموع n عدد طبیعی فرد برابر n^2 است، پس $n^2=64$ و در نتیجه $n=8$.

۴. گزینه‌ی «۲»

در هر دنباله، اگر مجموع جملات برابر S_n باشد، همواره داریم:

$$a_n=S_n-S_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}(2^n\cancel{-1})-\frac{1}{2}(2^{n-1}\cancel{-1})$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}\times2^n-\frac{1}{2}\times2^{n-1}\xlongequal{2^n=2^{n-1}\times2}\frac{1}{2}\times2^{n-1}(2-1)=2^{n-2}$$

۵. گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases}a_5+a_6=3\\ a_8+a_9=-2\end{cases}\xrightarrow{a_n=a_1+(n-1)d}\begin{cases}(a_1+4d)+(a_1+5d)=3\\ (a_1+7d)+(a_1+8d)=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a_1+9d=3\\ 2a_1+15d=-2\end{cases}$$

با کم کردن این دو معادله داریم:

$$\Rightarrow 15d-9d=-2-3\Rightarrow 6d=-5\Rightarrow d=-\frac{5}{6}$$

$$2a_1+\cancel{6}(-\frac{5}{\cancel{6}})=3\Rightarrow 2a_1=3+\frac{15}{2}=\frac{21}{2}\Rightarrow a_1=\frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow S=a_{13}+a_{15}=(a_1+12d)+(a_1+14d)=2a_1+26d$$

$$\Rightarrow S=2(\frac{21}{4})+26(-\frac{5}{6})\Rightarrow S=\frac{21}{2}-\frac{130}{6}=\frac{63-130}{6}=\frac{-67}{6}$$

۶. گزینه‌ی «۱»

با توجه به فرضیات سؤال داریم:

$$a_5=a_3+24\xrightarrow{a_n=a_1q^{n-1}}a_1q^4=a_1q^2+24$$

$$\Rightarrow a_1q^4-a_1q^2=24\Rightarrow a_1q^2(q^2-1)=24$$

$$\Rightarrow a_1q^2(q-1)(q+1)=24\xrightarrow{a,q\in\mathbb{Z}^+}$$

$$a_1(q-1)(q+1)q^2=2\times1\times3\times2^2\xrightarrow{\text{مقایسه}}\begin{cases}a_1=2\\ q=2\end{cases}$$

۷. گزینه‌ی «۳»

دنباله‌ای کراندار و غیرهمگراست که نوسانی باشد یا دارای حد یکتا نباشد، حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sqrt{n}=\pm\infty\to \text{بی‌کران}$$

$$2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\frac{\pm1}{\infty}=0\to \text{همگرا}$$

$$3)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n}{n}=\lim_{n\to\pm\infty}(-1)^n=\pm1\to \text{کراندار و غیرهمگرا}$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\frac{\pm1}{\infty}=0\to \text{همگرا}$$

۸. گزینه‌ی «۱»

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم ابتدا دنباله‌ی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$a_n=\log(n^2+2)-2\log(n+2)=\log(n^2+2)-\log(n+2)^2$$

$$\Rightarrow a_n=\log\frac{n^2+2}{(n+2)^2}=\log\frac{n^2+2}{n^2+4n+4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\log(\frac{n^2}{n^2})=\log(1)=0$$

۹. گزینه‌ی «۳»

ابتدا دنباله‌ی طول شمع را در هر لحظه می‌نویسیم. چون در هر دقیقه ۲ میلی‌متر از طول شمع کم می‌شود طول شمع را که در لحظه‌ی صفر برابر ۲۵ سانتی‌متر است برحسب میلی‌متر در نظر می‌گیریم:

$250,248,246,\dots,0$

پس دنباله‌ی فوق یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت (-2) است، پس داریم:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow 0=250+(n-1)\times(-2)$$

$$\Rightarrow 0=250-2n+2\Rightarrow 2n=252\Rightarrow n=126$$

پس چون تعداد جملات ۱۲۶ تا است، ۱۲۵ دقیقه زمان لازم است تا همه‌ی شمع آب شود.

۱۰. گزینه‌ی «۲» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۳» خورده.

برای این‌که جملات دنباله‌ی a_n خارج از بازه‌ی داده‌شده قرار گیرند باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a_n\le1/999\Rightarrow a_n-2\le-0/001\\ a_n\ge2/001\Rightarrow a_n-2\ge0/001\end{cases}\Rightarrow|a_n-2|\ge0/001$$

$$\Rightarrow|\frac{4n+1}{2n-5}-2|\ge\frac{1}{1000}\Rightarrow|\frac{\cancel{4n}+1-\cancel{4n}+10}{2n-5}|\ge\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow|\frac{11}{2n-5}|\ge\frac{1}{1000}\Rightarrow|2n-5|\le11000\Rightarrow 2n-5\le11000$$

$$\Rightarrow 2n\le11005\Rightarrow n\le5502/5\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n\le5502$$